Escuela de Educación Técnico Profesional N° 602

“Gral. San Martín”

Espacio curricular: **Matemática**

Curso: **4to Año "B” Electrónica**

Horas semanales: **4 hs**

Profesora: **Alonso, Liliana**

Correo electrónico: ***lilialonso88@gmail.com***

Ciclo lectivo: **2020**

El conjunto de los Números Complejos (C)

La radicación de base negativa e índice par no tiene solución en el conjunto de los números reales $\left(\sqrt[2]{-9};\ \sqrt[4]{-81};\ \sqrt[2]{-36}\right)$, ya que no existe ningún número real que elevado a una potencia par de por resultado un número negativo.

Por lo que se define un nuevo número, llamado i, cuyo cuadrado es igual a -1. Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt[2]{-1}}}$$

Dicho número i es la unidad imaginaria en el conjunto de los $\boldsymbol{Números\ Complejos}$.

Los Números complejos se pueden expresar de la siguiente forma: $(z = a + bi)$ donde a y b son números reales. El número a se llama parte o componente real y bi es la parte o componente imaginaria. Por ejemplo: $z = \boldsymbol{3 + 4i}$ $\longrightarrow$ **Expresión Binómica**

Los complejos que tienen la *parte imaginaria nula* se reducen a un número real. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} + 0i = \frac{1}{2}$$

Si *a es igual a cero* el número complejo se transforma en un imaginario puro. Por ejemplo:

$$0 + 4i = 4i$$

Operaciones con Números Complejos

Suma y resta de Números Complejos

Para sumar dos números complejos se suman las partes reales por un lado y las imaginarias por el otro.

Ejemplos:

$$\left(3 + \frac{1}{2}i\right) + \left(4 - \frac{5}{2}i\right) = (3 + 4) + \left(\frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i\right) = 7 - 2i$$

$$\left(5 - \frac{1}{2}i\right) - \left(4 - \frac{3}{4}i\right) = (5 - 4) + \left(-\frac{1}{2}i - \left(-\frac{3}{4}i\right)\right) = 1 + \frac{1}{4}i$$

Multiplicación de Números Complejos

Para multiplicar dos números complejos, se aplica la propiedad distributiva como si se tratara de números reales o expresiones algebraicas, debe tenerse en cuenta que $\boldsymbol{i^2 = -1}$

Ejemplo:

$$\left(3+\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(4-\frac{5}{2}i\right) = 3\cdot 4 - 3\cdot\frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i\cdot 4 - \frac{1}{2}i\cdot\frac{5}{2}i$$

$$= 12 - \frac{15}{2}i + \frac{4}{2}i - \frac{5}{4}i^2$$

$$= 12 - \frac{11}{2}i - \frac{5}{4}\cdot(-1)$$

$$= 12 - \frac{11}{2}i + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{53}{4} - \frac{11}{2}i$$

División de Números Complejos

Para dividir un número complejo por otro número complejo, se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador.

Ejemplo:

$$\frac{-5+3i}{2-3i} = \frac{(-5+3i)}{(2-3i)}\cdot\frac{(2+3i)}{(2+3i)}$$

$$= \frac{-10-15i+6i+9i^2}{2^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{-10-9i-9}{4-9i^2}$$

$$= \frac{-19-9i}{4+9}$$

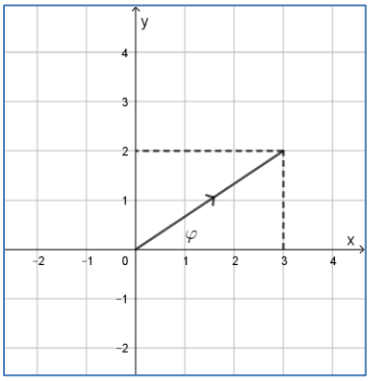
$$= -\frac{19}{13} - \frac{9i}{13}$$

Complejos conjugados: dado un complejo z, se define como su **conjugado** $\bar{z}$ al complejo que tiene la misma parte real y apuesta su parte imaginaria.

Ejemplo: z= -2 + 4i $\qquad \boldsymbol{\bar{z} = -2 - 4i}$

Representación de Números Complejos

En el eje de las abscisas se representa el componente real y en el eje de las ordenadas la parte imaginaria. Ejemplo: $3 + 2i$



Módulo y argumento

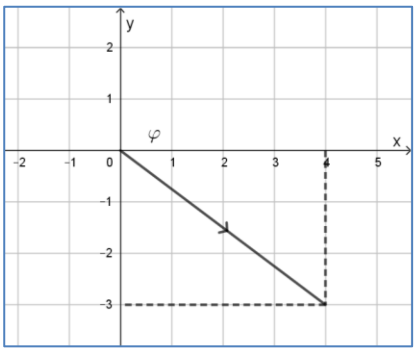
El módulo de un número complejo $Z = a + bi$ es la longitud del vector posición.

El módulo se designa entre barras y se calcula por el teorema de Pitágoras. $|Z| = \sqrt[2]{a^2 + bi^2}$

El argumento φ de un número complejo $Z = a + bi$ es el ángulo que forma el eje positivo x con el vector posición de Z. $\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

<u>Ejemplo</u>: Calcular el módulo y el argumento de $Z = 4 - 3i$

Representación:



Módulo:

$|Z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$

$|Z| = \sqrt[2]{4^2 + (-3)^2}$

$|Z| = \sqrt[2]{16 + 9}$

$|Z| = \sqrt[2]{25}$

$|Z| = 5$

Argumento:

$\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\varphi = -36°\ 52'\ 12''$

$\varphi = 360° - 36°\ 52'\ 12''$

$\varphi = 323°\ 7'\ 49''$

Actividades:

1) Completar la siguiente tabla (observar el primer ejemplo):

a)

COMPLEJO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA	OPUESTO	CONJUGADO
z	**Re(z)=2**	**Im(Z)=2**	**-z**	$\bar{z}$
z= 2 + 3i				
z= 3 - i				
z= 10 + 3i				
z= 1 + i				
z= 6 - 2I				
z= -8 + 4I				
z= -5 - 7I				
z= -2 + 9I				

b) Representar gráficamente los números complejos anteriores.

2) Dados los complejos $\mathbf{z_1=2+3i}$, $\mathbf{z_2=-1+4i}$ **y** $\mathbf{z_3=2-5i}$, hallar:

a) $z_1+z_2=$ *(Soluc: 1+7i)*

b) $z_1+z_3=$ *(Soluc: 4-2i)*

c) $z_1-z_2=$ *(Soluc: 3-i)*

d) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3-9i)*

e) $3z_2+2z_3=$ *(Soluc: 1+2i)*

f) $2z_1-3z_2=$ *(Soluc: 7-6i)*

g) $z_3-3z_1+4z_2=$ *(Soluc: -8+2i)*

h) $z+\overline{z2}=$ *(Soluc: 1-i)*

i) $z-\bar{z}=$

j) $2\bar{z_1}-z_1=$ *(Soluc: 2-9i)*

3)

a) (2+5i). (3+4i)= *(Soluc: -*

f) (1+i) (1-i)= *(Soluc: 2)*

14+23i)

b) $(1+3i).(1+i)=$	*(Soluc: -2+4i)*	**g)** $(5+2i)(3-4i)=$	*(Soluc: 23-14i)*
c) $(1+i).(-1-i)=$	*(Soluc: -2i)*	**h)** $(3+5i)^2=$	*(Soluc: -16+30i)*
d) $(2-5i).\ i=$	*(Soluc: 5+2i)*	**i)** $(1+3i)(1-3i)=$	*(Soluc: 10)*
e) $(2+5i)(2-5i)=$	*(Soluc: 29)*	**j)** $(-2-5i)(-2+5i)=$	*(Soluc: 29)*

k) $(2+3i).\ 3i=$	*(Soluc: -9+6i)*	**p)** $(1-3i).\ 2i=$	*(Soluc: 6+2i)*
l) $(3i).(-3i)=$	*(Soluc: 9)*	**q)** $(1+i)(2-3i)=$	*(Soluc: 5-i)*
m) $(2+3i)^2=$	*(Soluc: -5+12i)*	**r)** $(5+i)(5-i)$	*(Soluc: 26)*
n) $(6-3i)^2=$	*(Soluc: 27-36i)*	**s)** $(4+3i)(4+2i)-(2+i)(3-4i)=$	*(Soluc: 25i)*
o) $(2+3i)(1-i)=$	*(Soluc: 5+i)*		

4) ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta.
5) Dados los complejos del ejercicio 2, resolver las siguientes multiplicaciones:

a) $z_1 \cdot z_2=$	*(Soluc: -14+5i)*	**f)** $(z_1)^2=$	*(Soluc: -5+12i)*	**i)** $z_2(2z_1-3z_3)=$	*(Soluc: -82-29i)*
b) $z_1 \cdot z_3=$	*(Soluc: 19-4i)*	**g)** $(z_1-z_3)^2=$	*(Soluc: -64)*	**j)** $(3z_1+2z_2)^2=$	*(Soluc: -273+136i)*
c) $z_3-z_2=$	*(Soluc: 3-9i)*	**h)** $z_1 \cdot \bar{z}_1$	*(Soluc: 13)*		
d) $z_1(z_3+z_2)=$	*(Soluc: 5+i)*				
e) $z_1-z_2 \cdot z_3=$	*(Soluc: -16-10i)*				

6) Dados los complejos 2- mi y 3- ni hallar **m** y **n** para que su producto sea 8+4i.

7) Calcular las siguientes divisiones de números complejos.

a) $\frac{1+3i}{1+i} =$ $\quad (Sol: 2+i)$

b) $\frac{2+5i}{3+4i} =$ $\quad \left(Sol: \frac{26}{25} + \frac{7}{25}i\right)$

c) $\frac{1+i}{1-i} =$ $\quad (Sol: i)$

d) $\frac{3+5i}{1-i} =$ $\quad (Sol: -1+4i)$

e) $\frac{2-5i}{i} =$ $\quad (Sol: -5-2i)$

f) $\frac{20+30i}{3+i} =$ $\quad (Sol: 9+7i)$

g) $\frac{i}{3-2i} =$ $\quad \left(Sol: -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i\right)$

h) $\frac{1+i}{i} =$ $\quad (Sol: 1-i)$

i) $\frac{1+2i}{2-i} =$ $\quad (Sol: i)$

j) $\frac{1-i}{2+3i} =$ $\quad \left(\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\right)$

k) $\frac{19-4i}{2-5i} + \frac{3+2i}{i} =$ $\quad (Sol: 4)$

l) $\frac{2-i}{3+i} - \frac{1}{2i} =$ $\quad \left(Sol: \frac{1}{2}\right)$

m) $\frac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}} =$ $\quad \left(\frac{12}{5} - \frac{14}{5}\right)$

n) $\frac{(3+2i)^2 + 3 - 2i}{(5+i)^2} =$ $\quad \left(Sol: \frac{73}{169} + \frac{40}{169}i\right)$

o) $\frac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i} - 2i} =$ $\quad \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{5}\right)$

p) $\frac{\frac{1+i}{i}}{\frac{2+i}{1-i}} =$ $\quad \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\right)$

q) $\frac{3+2i}{i} - \frac{\overline{11+2i}}{3+4i} =$ $\quad (Sol: 1-i)$

r) $\frac{10-10i}{i} + \frac{15-25i}{\overline{2+i}} =$ $\quad (Sol: 1-17i)$

s) $\frac{1+ai}{a-i} =$ $\quad (Sol: i)$

t) $\frac{-a+bi}{b+ai} =$ $\quad (Sol: i)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 1; pág. 162: 2, 3 y 5*

COMPLEJO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA	OPUESTO	CONJUGADO
z	Re(z)	Im(z)	-z	z
z=2+3i	Re(z)=2	Im(z)=3	-z=-2-3i	z = 2 – 3i
z=3-i				